Correction : Examen IP11 — n°1
Mécanique du Point / Torseurs

19 avril 2004

1 déterminer la vitesse de Joe au décollage

1.1 rappel des hypothèses

1. frottement de l'air négligé
2. frottement de type Coulomb entre le pingouin et la banquise fondue

1.2 méthode

On veut connaître la vitesse de P à l'issu d'un parcours AB en connaissant la vitesse initiale v_0. On va donc appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à Joe pour pouvoir prendre en compte les efforts en présence associés au mouvement de Joe.

1.3 résolution

1. référentiel : le référentiel terrestre supposée galiléen
2. système : le pingouin assimilé à une masse ponctuelle en P
3. bilan des efforts appliqués au pingouin, voir figure 1 :
   – le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{z}$
   – la réaction de la bosse : $\vec{N} = N\vec{k}$
   – le frottement tangentiel entre le pingouin et la bosse : $\vec{T}$
   Le déplacement s'effectue le long de AB, dans le sens ascendant. Dans cette partie on aura une vitesse du Pingouin par rapport à la bosse : $\vec{v}_{P/bosse} = v_{P/bosse}\vec{j}$. D'après la 2ème loi de Coulomb on aura un frottement colinéaire à la vitesse et opposé en sens, d'où : $\vec{T} = -T\vec{j}$
4. Principe Fondamental de la dynamique appliqué à P :
   $$m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} \tag{1}$$
   On conseille dans l'énoncé d'utiliser les coordonnées suivantes :
   $\vec{AP} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ où $\vec{j}$ est aligné avec la bosse. D'où :
   $\vec{v}_{P/bosse} = \dot{x}_1\vec{i} + \dot{y}_1\vec{j} + \dot{z}_1\vec{k}$ et $\vec{\gamma}_{P/bosse} = \ddot{x}_1\vec{i} + \ddot{y}_1\vec{j} + \ddot{z}_1\vec{k}$.

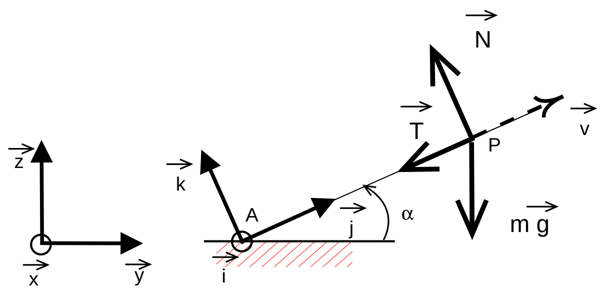

Figure 1 – Bilan des efforts appliqués à Joe réduit au point P

La projection du PFD énoncé en 1 sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donne :

$$m\ddot{x}_1 = 0 + 0 + 0 \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_1 = -mg\sin\alpha + 0 - T \tag{3}$$

$$m\ddot{x}_1 = -mg\cos\alpha + N + 0 \tag{4}$$

Pour traiter la suite du problème, on doit utiliser deux hypothèses :
- on suppose que Joe ne décolle pas sur le trajet AB, ce qui impose à chaque instant $z_1 = 0$ et par conséquent
$$\ddot{z}_1 = 0 \tag{5}$$
- d'après la deuxième loi de Coulomb
$$||\vec{T}||_{bosse \to Joe} = f\,||\vec{N}||_{bosse \to Joe} \tag{6}$$

D'après les équations 5 et 4 on obtient la norme de la réaction du support à chaque instant :

$$N = mg\cos\alpha \tag{7}$$

et pour l'effort tangentiel du au frottement :

$$T = fmg\cos\alpha \tag{8}$$

La seule équation scalaire issue du PFD non utilisée est l'équation 3 qui nous donne :

$$m\ddot{y}_1 = -mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha \tag{9}$$

en simplifiant terme à terme par la masse m, on obtient :

$$\ddot{y}_1 = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)g \tag{10}$$

que l'on intègre une première fois pour trouver la vitesse de Joe :

$$\dot{y}_1 = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt + K_1 \tag{11}$$

avec pour condition initiale, à t=0, $\dot{y}_1 = K_1 = v_0$, soit :

$$\dot{y}_1 = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt + v_0 \tag{12}$$

on intègre l'équation 12 pour trouver la position de Joe à l'instant t :

$$y_1 = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)g\frac{t^2}{2} + v_0 t + K_2 \tag{13}$$

avec pour condition initiale, à t=0, $y_1 = K_2 = 0$, soit :

$$y_1 = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)g\frac{t^2}{2} + v_0 t \tag{14}$$

On veut déterminer la vitesse de Joe au point B. Joe atteint le point B à l'instant t_B tel que $\vec{AP} = \vec{AB}$ soit $y_1 = L$. On doit donc résoudre l'équation du second degré en t_B suivante :

$$L = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)g\frac{t_B^2}{2} + v_0 t_B \tag{15}$$

Le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = v_0^2 - 2Lg(\sin\alpha + f\cos\alpha) \tag{16}$$

Les racines de cette équation sont :

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2Lg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} \tag{17}$$

et

$$t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2Lg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} \tag{18}$$

or $0 < t_1 < t_2$, ce qui signifie que Joe a déjà décollé pour $t_B = t_1$. La vitesse de Joe au décollage est donc :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2Lg(\sin\alpha + f\cos\alpha)} \tag{19}$$

2 application numérique

$$
\begin{array}{rcll}
\Delta & = & 34m^2.s^{-2} & \\
t_B & = & \frac{6-\sqrt{34}}{10} & \simeq 16,9ms \\
v_1 & = & \sqrt{34} & \simeq 5,83m.s^{-1}
\end{array} \tag{20}
$$

3 torseur cinématique à l'apogée de la trajectoire

On doit d'abord déterminer la vitesse de Joe à l'apogée de la trajectoire, il suffit de dériver les équations horaires du mouvement de Joe par rapport au temps :

$$x_2(t) = 0 \tag{21}$$

$$y_2(t) = v_1\, t \cos\alpha \tag{22}$$

$$z_2(t) = v_1\, t \sin\alpha - g\frac{t^2}{2} \tag{23}$$

soit :

$$\dot{x}_2(t) = 0 \tag{24}$$

$$\dot{y}_2(t) = v_1 \cos\alpha \tag{25}$$

$$\dot{z}_2(t) = v_1 \sin\alpha - gt \tag{26}$$

Joe atteint l'apogée de sa trajectoire pour $\dot{z}_2 = 0$ ce qui correspond au temps $t_{apogee} = \frac{v_1 \sin\alpha}{g}$ et à la vitesse $\vec{v}_{P\in Joe/sol}(t_{apogee}) = v_1 \cos\alpha\vec{y}$, figure 2.

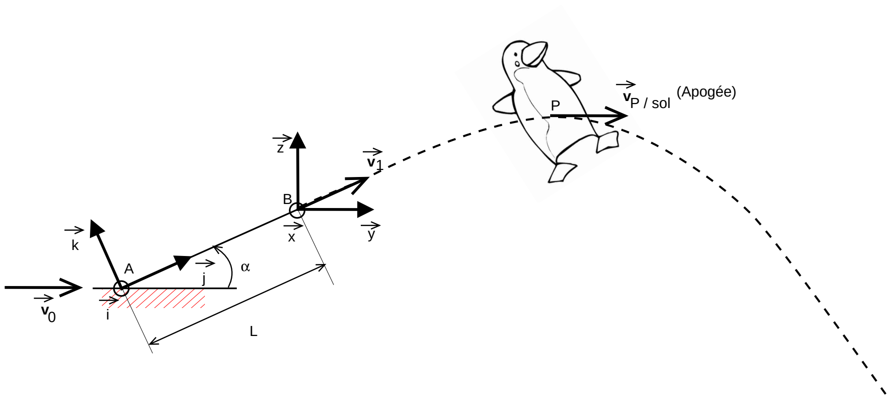

Figure 2 – Trajectoire de Joe et repères associés

La vitesse de rotation étant connue, on peut construire le torseur cinématique de Joe par rapport au sol au point P :

$$\{\mathcal{C}_{P\in Joe/Sol}\}_{(\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z})} = \left\{ \begin{array}{lcl} \vec{\Omega}_{Joe/Sol} & = & \omega\vec{x} \\ \vec{v}_{P\in Joe/Sol} & = & v_1 \cos\alpha\vec{y} \end{array} \right\}_{(P\,\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z})} \tag{27}$$

Pour déterminer le torseur cinématique de Joe par rapport au sol au point T (tête de Joe), **T et P appartenant au même solide (Joe)** on applique le théorème du changement de point :

$$\vec{v}_{T\in Joe/Sol} = \vec{v}_{P\in Joe/Sol} + \vec{TP} \wedge \vec{\Omega}_{Joe/Sol} \tag{28}$$

Cette réponse était déjà satisfaisante. On pouvait paramétrer la rotation de Joe autour de son centre de gravité en écrivant $\vec{TP} = -a\vec{v}$ avec la base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v})$ telle que :

$$\vec{u} = \cos\phi\vec{y} + \sin\phi\vec{z} \quad (29)$$

$$\vec{v} = -\sin\phi\vec{y} + \cos\phi\vec{z} \quad (30)$$

où $\phi = \omega t$, figure 3.

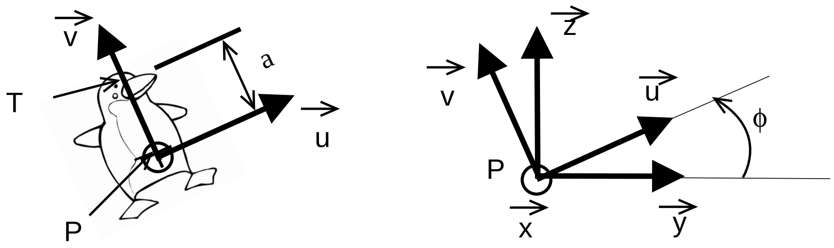

Figure 3 – Repère lié à Joe

On trouve finalement avec ces notations :

$$\{\mathcal{C}_{T\in Joe/Sol}\}_{(\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z})} = \left\{ \begin{array}{lcl} \vec{\Omega}_{Joe/Sol} & = & \omega\vec{x} \\ \vec{v}_{P\in Joe/Sol} & = & v_1\cos\alpha\vec{y} - a\omega\vec{u} \end{array} \right\}_{(T\,\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z})} \quad (31)$$