COURS DE MÉCANIQUE DES FLUIDES À L'USAGE DES ÉLÈVES DE 2ème ANNÉE SECTION GMP IUT CACHAN

par

Vincent MAUREL

I.U.T. Cachan
Département Génie Mécanique et Productique
9, avenue de la Division Leclerc – B.P. 140
94234 Cachan – Cedex

Ce polycopié est une version "à trous" destinée à des élèves d'IUT GMP 2ème année (niveau bac+2). Il correspond au cours de Mécanique des Fluides que j'ai donné pendant l'année scolaire 2002-2003 à l'IUT Cachan. Conscient des lacunes de cette première version, notamment les trous, j'espère qu'il pourra servir au moins de document de base pour certaines et certains qui préparent des diplômes du niveau du DUT.

Bonne lecture !

Le programme...

Mécanique des fluides incompressibles newtoniens

- STATIQUE DES FLUIDES
- DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS : écoulement unidimensionnel de fluides parfaits, conservation de la masse, équation de Bernoulli, théorème d'Euler
- NOTION DE FLUIDE VISQUEUX : nombre de Reynolds, écoulement laminaire dans une conduite de section circulaire, perte de charge régulière - singulières, équation de Bernoulli généralisée
- NOTION D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS

Table des matières

Table des matières **5**

1 Éléments de statique des fluides **7**
1.1 Modèle du fluide continu . . . 7
1.1.1 Définition de l'état fluide . . . 7
1.1.2 Approximation des milieux continus . . . 8
1.2 Champs de forces dans un fluide au repos . . . 8
1.2.1 Forces surfaciques . . . 8
1.2.2 Forces volumiques . . . 9
1.3 Pression dans un fluide au repos . . . 9
1.3.1 Définition des forces pressantes . . . 9
1.3.2 Densité volumique des forces de pression . . . 10
1.4 Équation fondamentale de la statique des fluides . . . 10
1.4.1 Énoncé . . . 10
1.4.2 Statique des fluides dans le champ de pesanteur . . . 10
1.4.3 Surface isobare . . . 11
1.5 Statique des fluides homogènes incompressibles . . . 11
1.5.1 Définition . . . 11
1.5.2 Champ de pression . . . 11
1.5.3 Théorème de Pascal . . . 11
1.6 Poussée d'Archimède . . . 12
1.6.1 Poussée d'un fluide sur une paroi . . . 12
1.6.2 Définition . . . 13
1.6.3 Expression de la poussée d'Archimède . . . 13
1.6.4 Théorème d'Archimède . . . 14

2 Étude des écoulements **17**
2.1 Point de vue . . . 17
2.2 Description du champ de vitesse . . . 17
2.2.1 Coordonnées lagrangiennes . . . 17
2.2.2 Coordonnées eulériennes . . . 18
2.3 Différents type d'écoulement . . . 18
2.3.1 Écoulement permanent . . . 18
2.3.2 Écoulement unidirectionnel . . . 18
2.4 Lignes de courant - tube de courant . . . 19

2.5 Accélération d'une particule fluide 20
2.5.1 Dérivée particulaire 20
2.6 Conservation de la masse 20
2.6.1 Écoulement unidimensionnel 21
2.6.2 Cas du fluide incompressible 21
2.6.3 Cas général 21

3 Dynamique des fluides parfaits 23
3.1 Problématique 23
3.1.1 Observation expérimentale 1 : la balle de ping-pong magique . 23
3.1.2 Observation expérimentale 2 : des feuilles de papier qui s'attirent 24
3.2 Théorème de Bernoulli 24
3.2.1 Conservation de l'énergie appliqué à un fluide 24
3.2.2 Énoncé du théorème de Bernoulli 25
3.2.3 Explication des observations 26
3.2.4 Application : l'effet Venturi 27
3.3 Théorème d'Euler 27
3.3.1 Principe 27
3.3.2 Application : force exercée sur une aube de turbine 28

4 Écoulements de fluides visqueux 29
4.1 Origines et effets de la viscosité 29
4.1.1 Phénomène 29
4.1.2 Forces de viscosité 30
4.1.3 Loi de Newton 30
4.1.4 Fluides newtoniens 30
4.1.5 Fluides non newtoniens (H.P.) 31
4.1.6 Viscosité cinématique 31
4.2 Écoulement visqueux 32
4.2.1 Écoulement isovolume, permanent, laminaire 32
4.2.2 Pertes de charges 33
4.2.3 Théorème de Bernoulli généralisé 34
4.3 Régimes d'écoulement 35
4.3.1 Expérience de Reynolds 35
4.3.2 Nombre de Reynolds 36
4.3.3 Interprétation : régimes turbulents, transitoires 36
4.3.4 Conséquence : expression des coefficients de pertes de charge linéaire 36

Chapitre 1

Éléments de statique des fluides

1.1 Modèle du fluide continu

1.1.1 Définition de l'état fluide

Un fluide est un matériau qui s'écoule...

La mécanique des fluides est l'étude des grands écoulements d'un milieu donné. On peut définir les fluides par leur domaines d'application : l'air ou l'eau pour les bateaux, les moteurs, les avions, la météo... mais aussi les fluides industriels pour l'agroalimentaire, les polymères, l'environnement -boues, recyclage-, les cosmétiques.

Avant de se jeter dans leur étude, distinguons les grandes catégories de fluides qui nous intéressent.

1.1.1.1 Fluide parfait

Dans un fluide parfait, les forces de cohésion sont nulles. Les forces de contacts sont alors perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

1.1.1.2 Fluide réel

Dans un fluide réel en mouvement, les forces de cohésion sont non nulles. Il existe alors une composante tangentielle des forces de contacts, c'est la viscosité. Dans un fluide réel au repos, les forces de contacts sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

1.1.1.3 Compressibilité

Pour une évolution isotherme on définit le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\Big(\frac{\partial V}{\partial P}\Big)_T = +\frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial \rho}{\partial P}\Big)_T \,(\text{en } Pa^{-1}) \tag{1.1}$$

où V est le volume (en m^3), P la pression (en Pa), T la température (en K) et ρ la masse volumique (en kg.m^{-3}).

Fluide incompressible Un fluide est incompressible quand pour une masse donnée, son volume est indépendant de la pression extérieure.

Fluide compressible Un fluide est compressible quand pour une masse donnée, son volume varie en fonction de la pression extérieure.

Remarque Pour des conditions usuelles de température et de pression on considérera les liquides comme incompressibles et les gaz comme compressibles.

Application numérique Par exemple pour T=300K et P=10^5Pa
$\rho(air\,gaz) = 1,3\,kg.m^{-3}$ et $\chi_T(air\,gaz) = 10^{-5}Pa^{-1}$
$\rho(eau\,liquide) = 1,0.10^3\,kg.m^{-3}$ et $\chi_T(eau\,liquide) = 5.10^{-10}Pa^{-1}$

1.1.2 Approximation des milieux continus

Dans le cadre de la mécanique des fluides la statique ou la dynamique des liquides et des gaz sont en général traitées du point de vue *macroscopique*, en utilisant les lois de la mécanique de Newton. Le fait qu'un fluide soit composé de molécules est négligé en premier lieu et les mouvements des molécules individuelles ne sont pas ici pris en compte. Le milieu d'étude est donc considéré comme *continu*. Dans ce contexte on étudie un petit volume du milieu dit *élément fluide*. Celui-ci est composé d'un grand nombre de molécules, de sorte que les variations statistiques des propriétés de la particule sont négligeables.

1.2 Champs de forces dans un fluide au repos

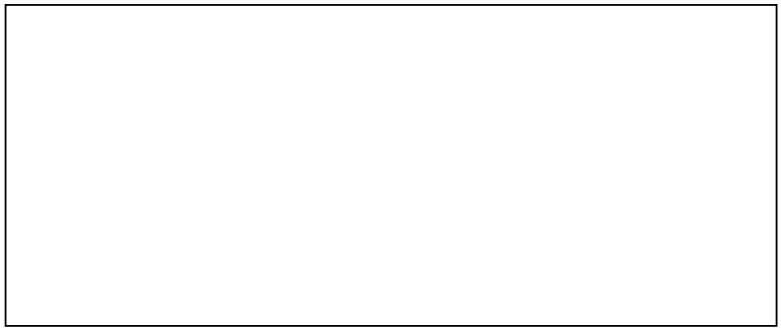


Figure 1.1 – Élément fluide

1.2.1 Forces surfaciques

Soit un élément de fluide donné $d\tau$, il subit des actions de courte portée mettant en jeu les particules situées au voisinage de la surface délimitant $d\tau$.

La force surfacique exercée sur l'élément de fluide de surface dS est :

$$d\vec{F}_S = \vec{f}_S dS \tag{1.2}$$

où $\vec{f}_S$ est la densité surfacique de forces.

1.2.2 Forces volumiques

Les particules de l'élément de fluide subissent également des actions à longue portée. Ces forces volumiques sont :

$$d\vec{F}_V = \vec{f}_V d\tau \tag{1.3}$$

où $\vec{f}_S$ est la densité volumique de forces.

Pour le champ de pesanteur $\vec{g}$ on écrit :

$$d\vec{F}_V = d(m\vec{g}) = \rho\vec{g}d\tau \tag{1.4}$$

1.3 Pression dans un fluide au repos

Le piston, le gaz et le ressort...

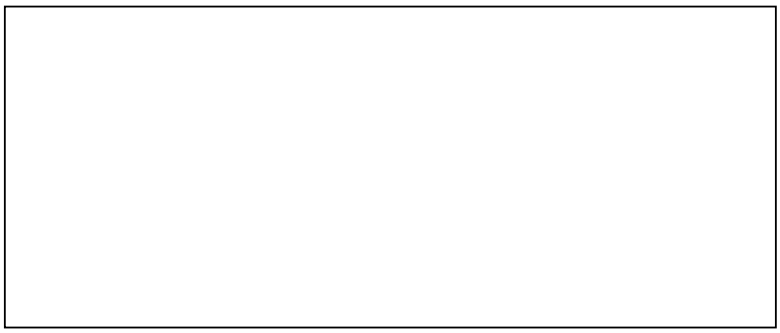


Figure 1.2 – Principe du manomètre

1.3.1 Définition des forces pressantes

Les forces pressantes exercées par un fluide *au repos* sont caractérisées par la pression, grandeur *scalaire*, définie en tout point à l'échelle *mésoscopique*.

La force pressante exercée sur un élément de surface d'aire dS et de vecteur unitaire normal $\vec{n}$, en contact avec le fluide a pour expression :

$$d\vec{F} = -P(M)dS\vec{n}, \tag{1.5}$$

où P(M) représente la pression (grandeur scalaire) au point M.

1.3.2 Densité volumique des forces de pression

Soit un volume de fluide parallélépipédique $d\tau = dx.dy.dz$. Calculons la résultante $d\vec{F}$ des forces de pression sur $d\tau$ (figure 1.3).

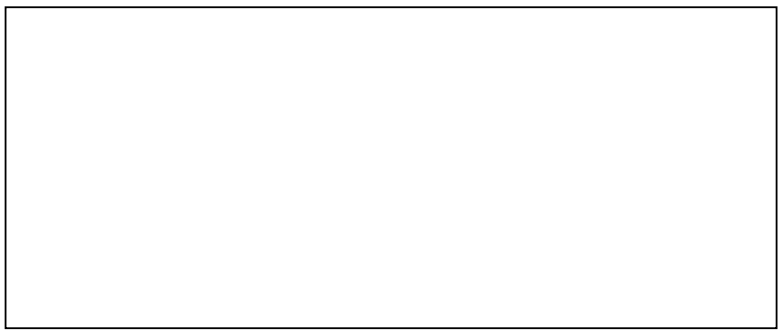


Figure 1.3 – Élément de fluide soumis à des forces de pression

Soit F_x la projection de $d\vec{F}$ sur la direction de l'axe (Ox) :

$$dF_x = dydzP(x,y,z) - dydzP(x+dx,y,z) = -dx\frac{\partial P}{\partial x}dydz \tag{1.6}$$

Pour toutes les directions, on trouve :

$$d\vec{F} = -dx\frac{\partial P}{\partial x}dydz\vec{e}_x - dy\frac{\partial P}{\partial y}dxdz\vec{e}_y - dz\frac{\partial P}{\partial z}dxdy\vec{e}_z = -\vec{grad}(P)d\tau \tag{1.7}$$

cette force est identique à une force volumique exercée sur $d\tau$.

1.4 Équation fondamentale de la statique des fluides

1.4.1 Énoncé

Un petit élément de fluide de volume $d\tau$ au repos est en équilibre sous l'action combinée d'un champ de forces de densité volumiques $\vec{f_V}$ et de forces de pressions.

La loi fondamentale de la statique des fluides est :

$$-\vec{grad}(P) + \vec{f_V} = 0 \tag{1.8}$$

1.4.2 Statique des fluides dans le champ de pesanteur

Pour un fluide soumis uniquement aux forces de pesanteur :

$$\vec{grad}(P) = \rho\vec{g} \tag{1.9}$$

1.4.3 Surface isobare

Les surfaces isobares sont définies par P=cte. On note que le vecteur $\vec{grad}P$ est normal à ces surfaces.

1.5 Statique des fluides homogènes incompressibles

1.5.1 Définition

Un fluide est dit homogène et incompressible si en tout point de celui-ci la masse volumique est constante, indépendante de la pression et de la température.

$$\rho(M) = \rho_0 = cte \text{ quelque soit } M \tag{1.10}$$

1.5.2 Champ de pression

Dans le cas du champ de pesanteur terrestre et pour un fluide homogène incompressible :

$$\vec{grad}(P) = \rho\vec{g} = -\rho g\vec{z} \tag{1.11}$$

donc P(x,y,z)=P(z) et :

$$P(z) = P(z_0) - \rho g(z - z_0) \tag{1.12}$$

1.5.3 Théorème de Pascal

Pour un liquide homogène et incompressible au repos dans le champ de pesanteur terrestre, toute variation de pression en un point du fluide est intégralement transmise à l'ensemble du fluide.

Application : la presse hydraulique.

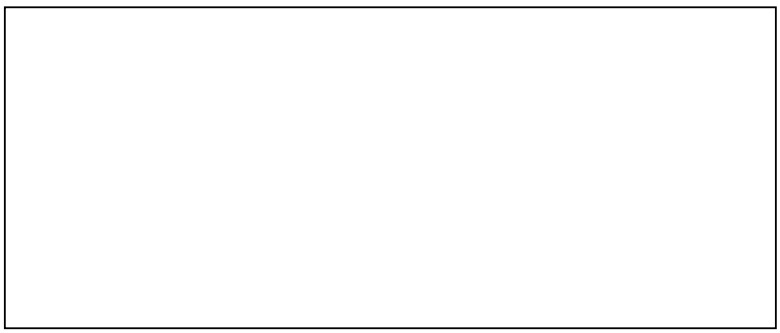


Figure 1.4 – presse hydraulique

Exercice : estimer le rapport des efforts F/f Application numérique : une masse m=1kg est placée en s. Pour S/s=10^3 quelle masse faut il placer sur S pour équilibrer le système ?

1.6 Poussée d'Archimède

1.6.1 Poussée d'un fluide sur une paroi

Dans les mêmes hypothèses, on veut estimer l'action d'un fluide sur une paroi En général, d'un côté de la paroi s'exerce la pression du fluide (P_a + ρg h), de

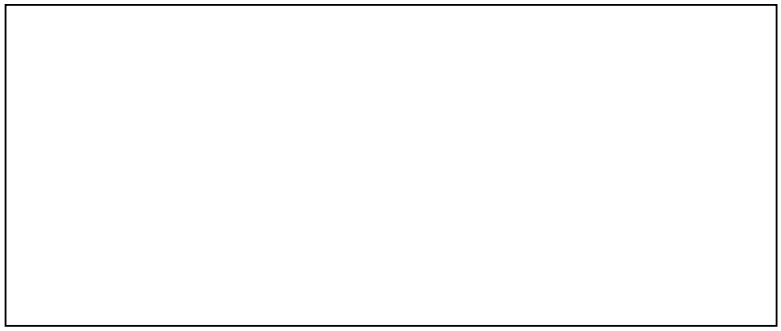


Figure 1.5 – paroi

l'autre la pression atmosphérique (P_a). On ne prendra en compte pour ce calcul que la surpression exercée sur un élément de paroi dS ramenée à la force :

$$d\vec{F} = \rho g h d\vec{S} \tag{1.13}$$

Pour pouvoir estimer la poussée du fluide sur l'ensemble de la paroi il faut intégrer cette quantité :

$$\vec{F} = \int_O^H d\vec{F} = \rho g \int_O^H h \, d\vec{S} \tag{1.14}$$

Pour déterminer le moment en un point O, on intègre le moment élémentaire :

$$d\vec{M} = O\vec{M} \wedge d\vec{F} \tag{1.15}$$

Soit :

$$\vec{M} = \int_O^H O\vec{M} \wedge d\vec{F} \tag{1.16}$$

Cas d'une paroi verticale Dans ce cas *particulier* la seule composante a prendre en compte est la composante horizontale de la poussée :

$$d\vec{F} = \rho g h d\vec{S} = \rho g h dz \vec{x} \tag{1.17}$$

et $\vec{F} = F\vec{x}$. On peut alors déterminer la norme de la poussée, pour une profondeur L de paroi :

$$F = \rho g \int_O^H Lz \, dz = \frac{1}{2} \rho g L H^2 \tag{1.18}$$

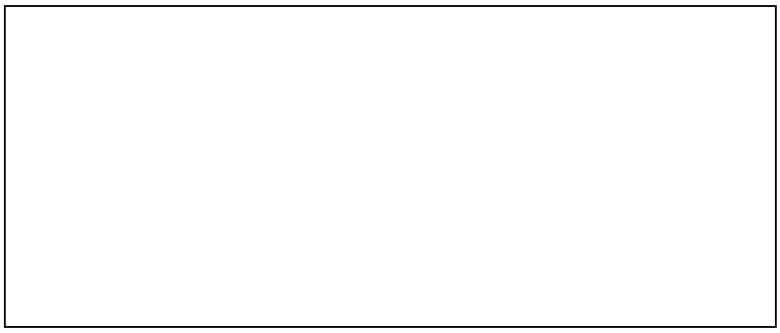


Figure 1.6 – paroi verticale

On peut déterminer le moment, par exemple exercé au sommet O de la paroi. Pour un moment élémentaire :

$$d\vec{M} = zdF\vec{y} \tag{1.19}$$

on trouve $\vec{M}(O) = M(O)\vec{y}$ tel que :

$$F = \rho g \int_O^H Lz^2\, dz = \frac{1}{3}\rho g L H^3 \tag{1.20}$$

1.6.2 Définition

Dans la suite nous appellerons corps immergé tout corps en contact avec un liquide tel que le ou les fluides déplacés par le corps sont en équilibre en présence et en absence du corps immergé.

1.6.3 Expression de la poussée d'Archimède

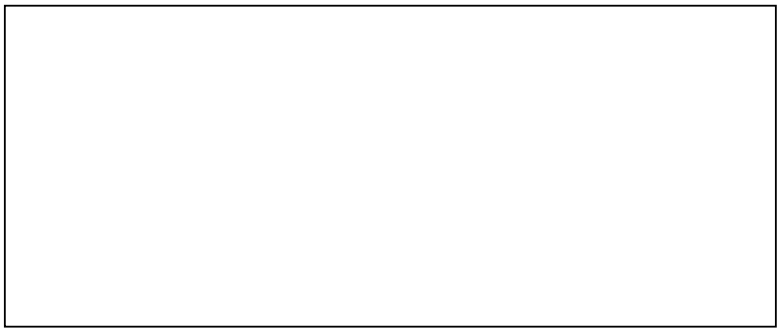


Figure 1.7 – Élément de fluide soumis à des forces de pression

Soit un corps de volume V, limité par une enveloppe de surface S et immergé dans un fluide quelconque au repos dans le champ de pesanteur. Ce corps étant en

équilibre faisons le bilan des forces en présence dans le volume de fluide V de surface S (et **pas dans le solide**) :

- forces de pressions fluides sur la surface S : $\vec{F}_S = \int\int_S -pd\vec{S}$
- forces volumiques de pesanteur (poids du volume de fluide V) : $\vec{F}_V = \rho V\vec{g} = M_f\vec{g}$

Le fluide étant en équilibre :

$$\vec{F}_S + \vec{F}_V = 0 \tag{1.21}$$

$$\vec{F}_S = -\vec{P} = -M_f\vec{g} \tag{1.22}$$

Or on vient de calculer les forces de pressions fluides sur la surface S, ce sont les mêmes que subit le corps immergé et ceci quelque soit sa masse !

1.6.4 Théorème d'Archimède

Un corps complètement immergé dans un fluide en équilibre est soumis à une force opposée au poids du fluide déplacé, appelée poussée d'Archimède.

Le moment de ces forces peut être calculé en considérant que la poussée est appliquée au centre d'inertie du fluide déplacé, appelé centre de poussée.

Cas particulier 1 : solide complètement immergé

Cas particulier 2 : solide partiellement immergé, carène de bateau

Chapitre 2

Étude des écoulements

2.1 Point de vue

Alors que le chapitre précédent s'intéressait à des fluides au repos, nous abordons ici l'étude des fluides en mouvement. Nous nous limiterons toujours à l'étude des fluides incompressibles newtoniens.

2.2 Description du champ de vitesse

En cinématique du solide on peut utiliser un torseur cinématique pour apprécier la vitesse d'un solide considéré. Ici nous voulons décrire l'ensemble du mouvement d'un fluide grâce au champ de vitesse.

Champ de vitesse : c'est l'ensemble des valeurs des vitesses des particules fluides qui constituent le fluide.

Deux approches peuvent alors être utilisées.

2.2.1 Coordonnées lagrangiennes

En mécanique du point ou du solide, on utilise usuellement les coordonnées de Lagrange (figure 2.1) : l'observateur est lié à un repère Galiléen qui lui permet de suivre le mouvement de l'objet observé. Pour un fluide cela permet de déterminer la trajectoire de chaque particule fluide en fonction du temps $\vec{R_i}(t)$ et de reconstituer le mouvement de l'ensemble du fluide à condition de connaître l'origine de chaque trajet.

On aura par exemple la vitesse de la particule i :

$$\vec{V_i}(t) = \frac{d\vec{R_i}(t)}{dt} \tag{2.1}$$

Figure 2.1 – Lagrange (1736–1813)

2.2.2 Coordonnées eulériennes

Une autre méthode bien mieux adaptée à l'étude d'un écoulement à un instant donné est celle proposée par Euler (figure 2.3(a)). Elle consiste à fixer l'observateur en un point de l'espace et d'évaluer en ce point les grandeurs *cinématiques* liées au fluide (vitesse, débit, pression...) en fonction du temps. On aura alors une description complète de l'écoulement en ce point en fonction du temps et sans connaître *a priori* l'origine des particules qui passent par ce point. Par exemple la vitesse aura pour expression (les lettres minuscules sont réservées par convention aux quantités eulériennes) :

$$\vec{v}(M,t) \tag{2.2}$$

On regarde toujours le même point. À des instants différents, la vitesse aura évoluée en ce point (figure 2.3(b)).

2.3 Différents type d'écoulement

Des écoulements *permanents et unidirectionnels* vont faire l'objet de cette étude.

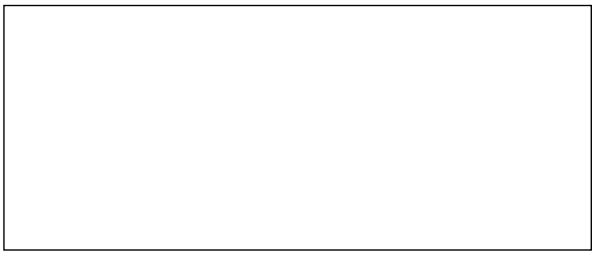
2.3.1 Écoulement permanent

C'est un écoulement dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps (on parle également d'écoulement stationnaire). Par exemple, en tout point M du fluide on aura $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(M)$.

2.3.2 Écoulement unidirectionnel

C'est un écoulement dont les caractéristiques ne dépendent que d'une seule variable de l'espace. Par exemple, en tout point M du fluide on aura $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(x,y,z,t) = \vec{v}(x,t)$.

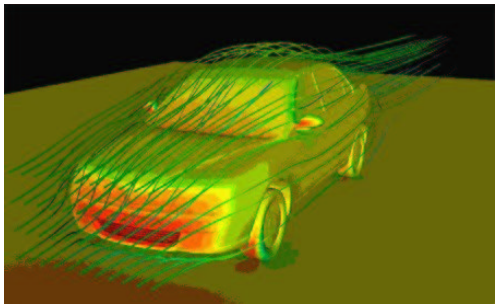
(a) Euler (1707–1783)



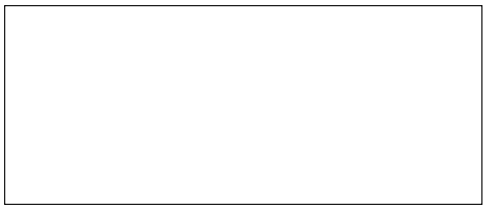
(b) Approche d'Euler

Figure 2.2 – Style eulérien

2.4 Lignes de courant - tube de courant



(a) Exemple de simulation



(b) Principe

Figure 2.3 – Ligne et tube de courant dans un écoulement

En chaque point d'un fluide où la vitesse est connue, on trace la tangente en ce point au vecteur vitesse. La courbe qui joint tous ces point est la *ligne de courant* (figure 2.3).

Si on exprime la vitesse du fluide dans un repère cartésien, on peut retrouver l'équation d'une ligne de courant à partir de la relation :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{2.3}$$

Si maintenant on choisit un volume fini de fluide (englobant plusieurs lignes de courant), on obtient un *tube de courant*.

2.5 Accélération d'une particule fluide

Alors qu'il est facile de d'obtenir par dérivation successives l'accélération d'un solide en un point M de celui-ci tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \tag{2.4}$$

cela devient rapidement inextricable pour un fluide.

On a alors besoin dans le formalisme eulérien de nouvelles notions qui permettront de savoir ce qui ce passe en un point donné M.

2.5.1 Dérivée particulaire

Pour échapper au problème de définition d'une origine (d'où vient mon fluide ?) on détermine l'accélération à partir de la *dérivée particulaire* du champ de vitesse :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}(M,t)}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\underline{\underline{grad}}\vec{v})\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{grad}(\frac{v^2}{2}) + \vec{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \tag{2.5}$$

On distingue :

- une partie locale (temporelle) de cette dérivation : $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ qui exprime les variations en fonctions du temps du vecteur vitesse en un point M fixe dans un repère de référence.
- une partie convective (spatiale) de cette dérivation : $(\underline{\underline{grad}}\vec{v})\vec{v}$ qui permet d'apprécier la non uniformité du champ de vitesse autour du point M

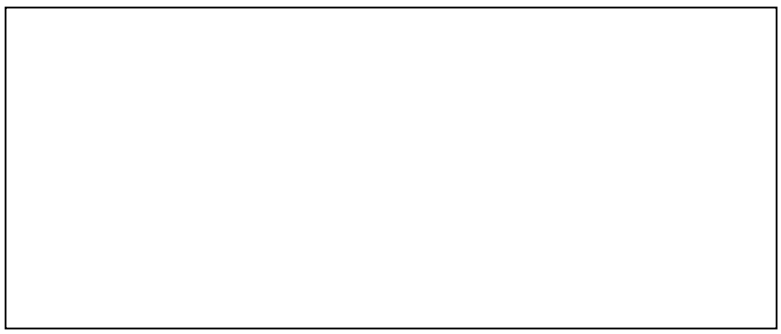


Figure 2.4 – Dérivée particulaire

2.6 Conservation de la masse

On va mettre en évidence que la conservation de la masse dans un écoulement fluide peut être traduit à travers l'*équation de continuité*.

2.6.1 Écoulement unidimensionnel

Pour un tube de courant donné, on considère un écoulement unidimensionnel (figure 2.5). Soit deux sections distinctes S_A et S_B situées aux abscisses respectives x_A et x_B. La conservation de la masse entre ces deux sections se traduit par le passage d'une même masse de fluide en A et B pour une unité de temps : $\frac{dm}{dt}$.

$$\frac{dm_A}{dt} = \frac{dm_B}{dt} = \frac{dm}{dt} = Cte \tag{2.6}$$

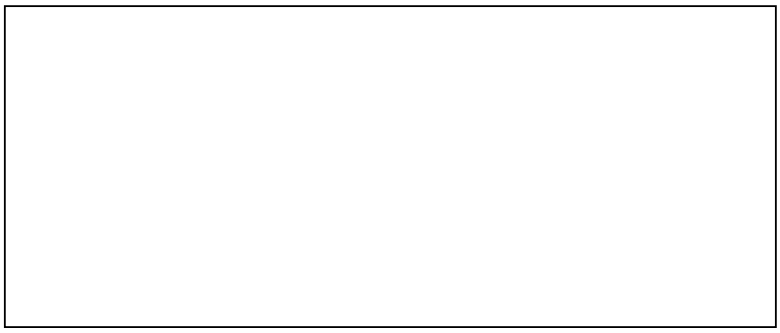


Figure 2.5 – Débit dans un écoulement unidimensionnel

Soit v_A et v_B les vitesses respectives en A et B. En un instant unité dt, le fluide progresse d'une distance $dx_A = v_A\,dt$ et $dx_B = v_B\,dt$ respectivement en A et B.

Or au point A (respectivement B) on aura :

$$dm_A = \rho_A dV_A = \rho_A\,S_A\,dx_A = \rho_A\,S_A v_A\,dt \tag{2.7}$$

On peut donc définir le *débit massique* D_m par l'expression :

$$D_m = \frac{dm}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = \rho_A\,S_A v_A\,dt = \rho_B\,S_B v_B\,dt \tag{2.8}$$

2.6.2 Cas du fluide incompressible

Pour un fluide incompressible ($\rho_A = \rho_B = \rho$), on peut définir le *débit volumique* D_v par l'expression :

$$D_v = \frac{dm}{\rho dt} = \frac{dV}{dt} = S_A v_A\,dt = \ S_B v_B\,dt \tag{2.9}$$

2.6.3 Cas général

En toute rigueur, on définit les débits massique et volumique pour des écoulement quelconques à l'aide de relations intégrales. Ceci permet d'estimer ces débits pour des fluides compressibles ou des écoulements bi- ou tridimensionnels par exemple.

Le débit massique a pour expression dans le cas d'un écoulement quelconque :

$$D_m = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \int\int_S \rho \vec{v}.\vec{n}.dS \tag{2.10}$$

Le débit volumique a pour expression dans le cas d'un écoulement quelconque :

$$D_v = \frac{dV}{dt} = \int\int_S \vec{v}.\vec{n}.dS \tag{2.11}$$

c'est tout simplement le flux du vecteur $\vec{v}$ à travers une section donnée S.

Exemple : bifurcation dans un écoulement

Chapitre 3

Dynamique des fluides parfaits

Nous limiterons ce chapitre aux écoulements de fluides *parfaits, incompressibles* et *irrotationnels*. Ce cadre a un sens pour des écoulements à faible gradient de vitesse tels que les frottements soient négligeables. On retrouvera de tels conditions d'écoulements en dehors des couches limites et des zones turbulentes (cf chapitre sur les notions de viscosité). Par souci de simplicité, on supposera que ces conditions sont respectées partout.

3.1 Problématique

Le chapitre précédent finissait par expliciter le principe de conservation de matière. On a montré que la conservation de la masse imposait un lien explicite entre la vitesse dans un écoulement et la section de celui-ci. Par contre nous n'avions aucune idée du possible lien entre la vitesse dans un écoulement et les autres grandeurs telles que pression et efforts sur les parois...il nous manque les aspects dynamique du problème.

3.1.1 Observation expérimentale 1 : la balle de ping-pong magique

On peut constater qu'une balle de ping-pong reste dans un jet d'air incliné. Pourquoi ?

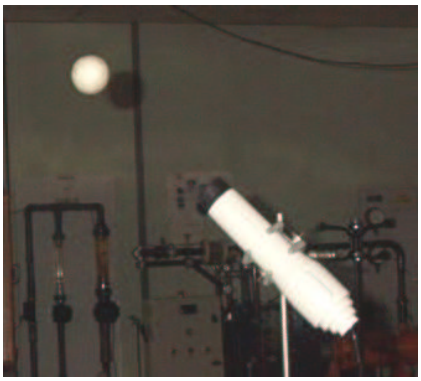


Figure 3.1 – Balle de ping-pong

3.1.2 Observation expérimentale 2 : des feuilles de papier qui s'attirent

En soufflant sur deux feuilles de papier, les feuilles s'attirent comme aspirée par le souffle. Pourquoi ?

Figure 3.2 – Feuilles de papier

3.2 Théorème de Bernoulli

3.2.1 Conservation de l'énergie appliqué à un fluide

Soit l'écoulement décrit sur la figure 3.3. Cet écoulement étant unidimensionnel, stationnaire et pour un fluide parfait incompressible, on fait le bilan énergétique du système constitué par le tube de courant T :

- travail des forces de pression : pour la section S_1, $dW_1 = \vec{F} \cdot \vec{dl} = P_1 S_1 v_1 dt$ et pour la section S_2, $dW_2 = P_2 S_2 v_2 dt$
- l'énergie potentielle : pour la section S_1, $dE_{p1} = h_1 dm\, g$ et pour la section S_2, $dE_{p2} = h_2 dm\, g$
- l'énergie cinétique : pour la section S_1, $dE_{c1} = \frac{1}{2} dm v_1^2$ et pour la section S_2, $dE_{c2} = \frac{1}{2} dm v_2^2$

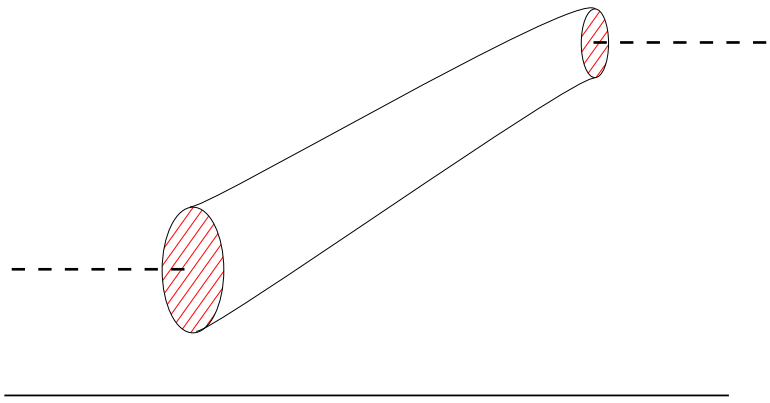


Figure 3.3 – Bilan énergétique dans un écoulement

À partir du bilan énergétique ci-dessus, le principe de conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$dW_1 + dE_{p1} + dE_{c1} = dW_2 + dE_{p2} + dE_{c2} = Cte \tag{3.1}$$

Soit :

$$P_1 S_1 v_1 dt + h_1 dm\, g + \frac{1}{2} dm v_1^2 = P_2 S_2 v_2 dt + h_2 dm\, g + \frac{1}{2} dm v_2^2 = Cte \tag{3.2}$$

On rappelle que $dm = \rho dV = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt$, soit :

$$P_1 dV + h_1\, g\rho dV + \frac{1}{2} v_1^2 \rho dV = P_2 dV + h_2\, g\rho dV + \frac{1}{2} v_2^2 \rho dV = Cte \tag{3.3}$$

$$P_1 + \rho g h_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho g h_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = \text{Charge (en Pa)} \tag{3.4}$$

3.2.2 Énoncé du théorème de Bernoulli

Dans un écoulement *stationnaire, incompressible de fluide parfait* soumis au champ de pesanteur on a, sur chaque ligne de courant :

$$P + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} = P_t = Cte \tag{3.5}$$

où z est l'altitude au point considéré et H la charge (en Pa) correspondant à ligne de courant considéré.

3.2.3 Explication des observations

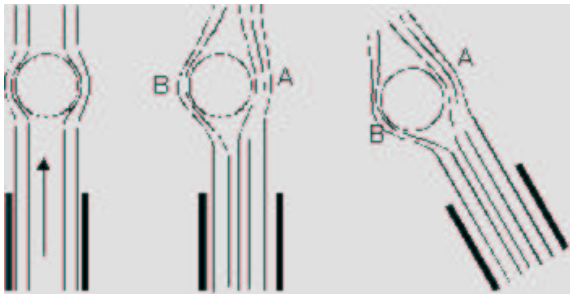


Figure 3.4 – Balle de ping-pong en lévitation

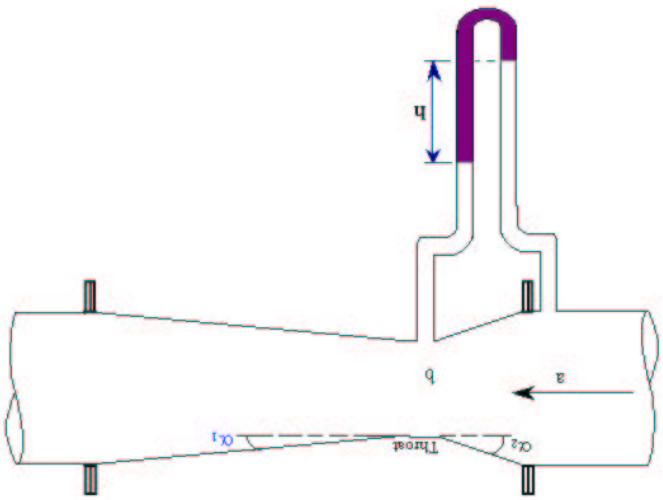


Figure 3.5 – Tube de Venturi

3.2.4 Application : l'effet Venturi

3.3 Théorème d'Euler

On cherche à mettre en évidence les efforts dynamiques apportés par un fluide sur une paroi.

3.3.1 Principe

À nouveau le fluide est parfait et incompressible. On applique le principe de conservation de quantité de mouvement au cas de l'écoulement unidimensionnel.

On rappelle que la variation de quantité de mouvement $d\vec{p}$ est définie, avec les notations de la figure 3.6, par :

$$d\vec{p} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)dm = D_m dt(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \tag{3.6}$$

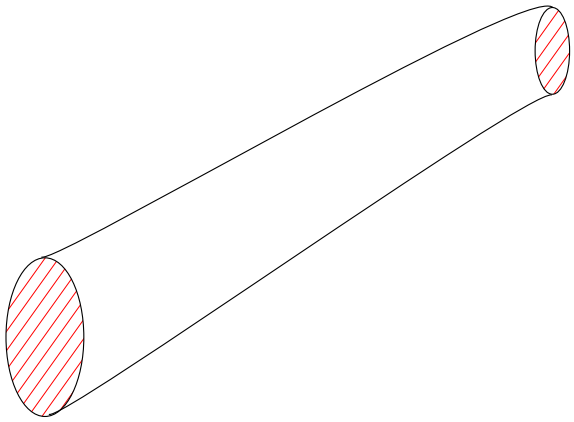


Figure 3.6 – Étude de la quantité de mouvement

où $D_m = \frac{dm}{dt}$ est le débit massique du fluide.

Le principe de conservation de quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = D_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \tag{3.7}$$

ce qui constitue le *théorème d'Euler*.

3.3.2 Application : force exercée sur une aube de turbine

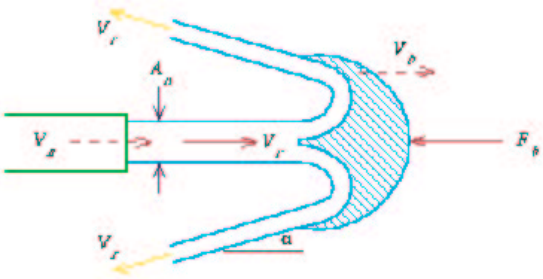


Figure 3.7 – Écoulement d'un jet sur un aubage de turbine

Chapitre 4

Écoulements de fluides visqueux

Nous essayons à nouveau d'écarter une hypothèse simplificatrice : on passe du fluide parfait au fluide réel en introduisant les phénomènes de viscosité, autrement dit d'adhérence du fluide aux parois. Après avoir introduit cette nouvelle notion, nous verrons son expression dans le phénomène connu sous le nom de pertes de charges.

4.1 Origines et effets de la viscosité

4.1.1 Phénomène

Si on déplace une feuille à la surface d'un fluide visqueux (miel ou savon liquides par exemple), on constate que la feuille entraîne le fluide en contact avec celle-ci. Par contre, le fluide au fond du récipient ne se met pas en mouvement (figure 4.1). Ce phénomène met en évidence l'existence d'un gradient de vitesse dans l'épaisseur

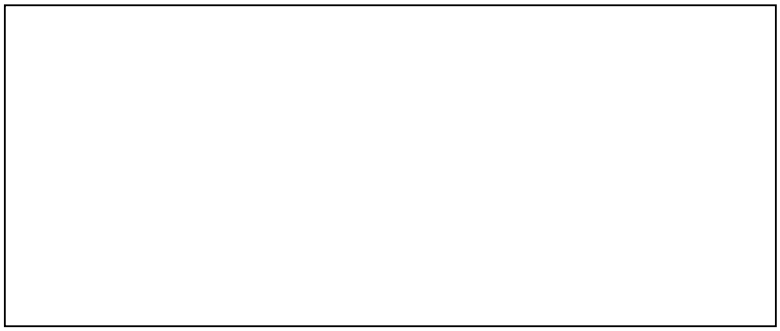


Figure 4.1 – Du miel qui colle...

de l'écoulement.

4.1.2 Forces de viscosité

Pour une couche de fluide entre deux plaques planes parallèles, dont l'une est fixe et l'autre mobile, on constate :

- la vitesse passe de nulle à proximité de la paroi fixe à v_p vitesse de la paroi mobile ;
- pour un régime laminaire (v_p et h faibles), les différentes couches de fluide "glissent" les unes sur les autres : la vitesse est constante à une altitude donnée ;
- il existe des forces de frottement entre deux couches voisines, ce sont les *forces de viscosité*

4.1.3 Loi de Newton

Dans un écoulement de type visqueux, on exprime les forces élémentaires de viscosité $d\vec{F}$ appliquées à un élément de surface dS et tangentes à cet élément de surface, grâce à la loi de Newton :

$$\frac{dF}{dS} = \eta \frac{dv}{dz} \tag{4.1}$$

où η est le coefficient de viscosité dynamique du fluide considéré et $\frac{dv}{dz}$ le gradient de vitesse dans l'épaisseur de l'écoulement.

Unités η s'exprime dans le S.I. en Pascal . seconde (Pa.s) ou en Poiseuille (Pl)

Dimension $[\eta]=ML^{-1}T^{-1}$

Ordre de grandeur À titre d'exemple, on remarquera l'extrême sensibilité à la température de la viscosité dynamique.

fluide	η (Pa.s)
eau (0^oC)	$1,787.10^{-3}$
eau (20^oC)	$1,002.10^{-3}$
eau (100^oC)	$0,282.10^{-3}$
huile d'olive (20^oC)	$\simeq 100.10^{-3}$
glycérol (20^oC)	$\simeq 1000.10^{-3}$
H_2 (20^oC)	$0,86.10^{-5}$
O_2 (20^oC)	$1,95.10^{-5}$

Tableau 4.1 – Exemples de viscosité dynamiques

4.1.4 Fluides newtoniens

Il s'agit de fluide tels que le coefficient de viscosité dynamique ne dépend que de la température et de la pression (tous les gaz et les liquides purs).

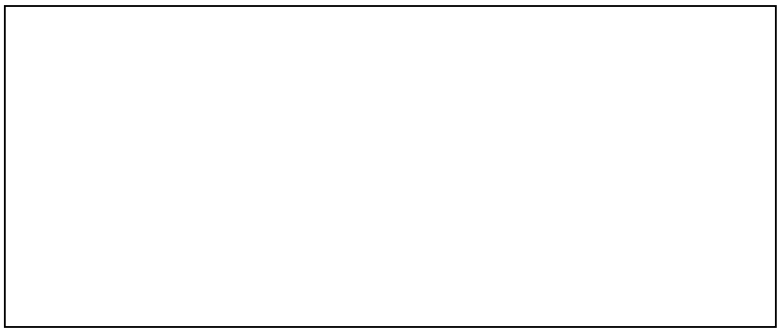


Figure 4.2 – Fluide Newtonien : pour T=constante

4.1.5 Fluides non newtoniens (H.P.)

Tous les autres !

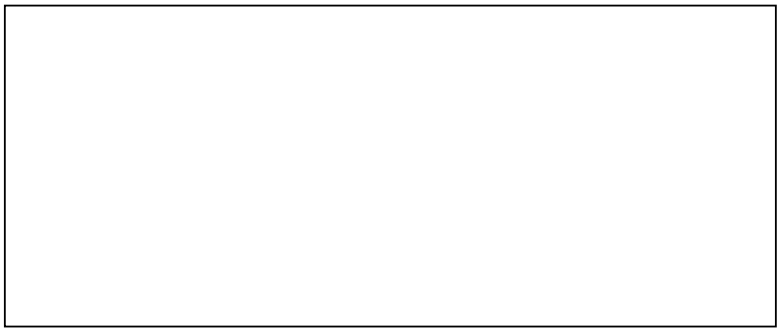


Figure 4.3 – Fluide NON-Newtonien : pour T=constante

4.1.6 Viscosité cinématique

Pour caractériser un fluide, on utilise souvent la viscosité cinématique ν :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{4.2}$$

dans le système S.I. son unité est le $m^2.s^{-1}$

4.2 Écoulement visqueux

Dans la suite de l'exposé, on parlera de fluide réel pour désigner un fluide visqueux.

4.2.1 Écoulement isovolume, permanent, laminaire

4.2.1.1 Introduction

On s'intéresse à l'effet de la viscosité sur un écoulement dans une canalisation cylindrique. Il existe dans ce cas un profil de vitesse, tel que pour une section donnée de l'écoulement la vitesse est nulle au bord de la canalisation et maximale au centre de celle-ci.

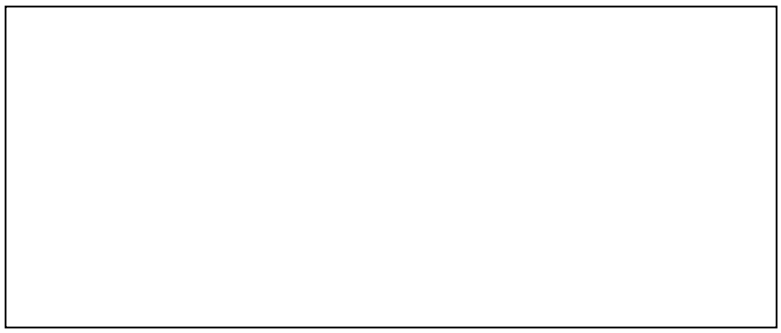


Figure 4.4 – Profil de vitesse dans un tube avec prise en compte de la viscosité

Définition : écoulement laminaire Un écoulement est laminaire si les lignes de courant au sein de cet écoulement ne se croisent pas.

4.2.1.2 Écoulement de Poiseuille

L'écoulement *laminaire* et permanent d'un fluide visqueux, dans une canalisation cylindrique est appelé écoulement de Poiseuille (figure 4.4).

Pour un tel écoulement, on montre que pour un rayon de canalisation R et une vitesse au centre de l'écoulement pour une abscisse donnée v_axe, la vitesse de l'écoulement pour un point quelconque de cette section vaut :

$$v = v_{axe}(1 - \frac{r^2}{R^2}) \tag{4.3}$$

où r est la distance du point considéré à l'axe de la canalisation.

Le profil de vitesse n'est pas constant dans une section donnée de la canalisation : l'écoulement n'est plus unidimensionnel. Dans une section le profil de vitesse n'évolue pas en fonction du temps : l'écoulement est permanent. Le profil de vitesse varie en fonction de la position de la section dans la canalisation.

4.2.2 Pertes de charges

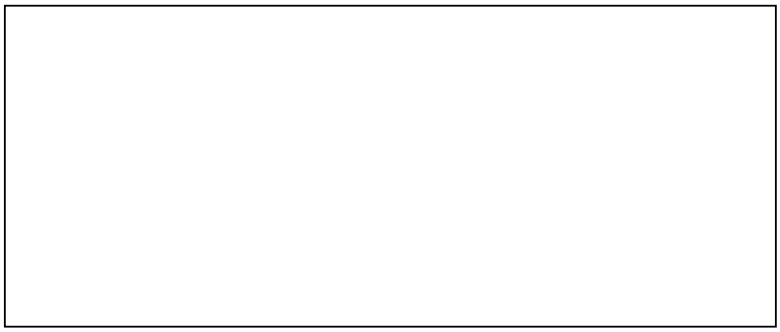


Figure 4.5 – Conduite horizontale de section constante

4.2.2.1 Mise en évidence

Soit une conduite horizontale, de diamètre constant (figure 4.5). Le fluide au centre de la canalisation a pour pression p_1 au niveau de la section S_1. D'après le théorème de Bernoulli, pour toute section de cette canalisation, je dois retrouver la même pression. Ce qui signifie qu'il ne serait pas nécessaire de dépenser de l'énergie pour entretenir un écoulement à débit constant ! Pratiquement, cette pression diminue de l'amont à l'aval de la canalisation. Ce phénomène est connu sous le nom de pertes de charges.

4.2.2.2 Pertes de charges régulière

Pour une canalisation sans obstacle (ou changement brutal de section), ni machine, parcourue par un fluide réel, les frottements sur les parois de la canalisation donnent lieu à des pertes de charges régulières.

Ceci aura pour conséquence de modifier le bilan énergétique entre deux sections dans un tube de courant (voir paragraphe 3.2.1). Il faut prendre en compte les pertes par énergie de frottement dE_f :

$$dW_1 + dE_{p1} + dE_{c1} = dW_2 + dE_{p2} + dE_{c2} + dE_f \neq cte \tag{4.4}$$

L'équation de Bernoulli devient pour la pression :

$$P_1 + \rho g h_1 + \rho \frac{v_{c1}^2}{2} = P_2 + \rho g h_2 + \rho \frac{v_{c2}^2}{2} + \Delta p_c \tag{4.5}$$

L'équation de Bernoulli devient pour les hauteurs manométriques :

$$\frac{P_1}{\rho g} + h_1 + \frac{v_{c1}^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_2 + \frac{v_{c2}^2}{2g} + \Delta H_c \tag{4.6}$$

où Δp_c et ΔH_c sont les pertes de charges entre les sections 1 et 2 de l'écoulement, v_{c1} et v_{c2} sont les vitesses *moyennes d'énergie cinétique* . On peut montrer que pour un régime laminaire et dans une section de l'écoulement S_i, on aura :

$$v_{ci}^2 = 2.(\frac{D_v}{S_i})^2 \tag{4.7}$$

Pour un écoulement turbulent, on choisira le plus souvent :

$$v_{ci} = (\frac{D_v}{S_i}) \tag{4.8}$$

c'est-à-dire la *vitesse moyenne débitante* de l'écoulement (ramenée au débit volumique dans l'écoulement).

4.2.2.3 Pertes de charges singulière

En présence de modification brutale d'un écoulement, il peut apparaître des pertes de charges singulières (localisées) qui modifieront l'équation de Bernoulli de la même façon que les pertes de charges régulières. L'estimation de ces pertes de charges singulières étant le plus souvent expérimentale où numérique.

4.2.2.4 Écoulement à travers des machines

Lorsqu'un fluide passe à travers une machine il peut soit céder du travail (turbine) soit en gagner au passage (pompes). On considérera que la pompe fournira de l'énergie au fluide grâce à une différence de pression Δp_p alors que la turbine prélèvera une partie de l'énergie hydraulique que l'on notera Δp_T. Ainsi, la pression totale sera modifiée au cours d'un tel écoulement entre une section d'entrée S_1 et une section de sortie S_2 par :

$$p_{t2} = p_{t1} + \Delta p_p - \Delta p_T - \Delta p_c \tag{4.9}$$

et la charge manométrique par :

$$H_{t2} = H_{t1} + \Delta H_p - \Delta H_T - \Delta H_c \tag{4.10}$$

4.2.3 Théorème de Bernoulli généralisé

On peut alors définir le théorème de Bernoulli généralisé pour la pression par :

$$P_1 + \rho g h_1 + \rho \frac{v_{c1}^2}{2} = P_2 + \rho g h_2 + \rho \frac{v_{c2}^2}{2} + \Delta p_c - \Delta p_p + \Delta p_T \tag{4.11}$$

L'équation de Bernoulli devient pour les hauteurs manométriques :

$$\frac{P_1}{\rho g} + h_1 + \frac{v_{c1}^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_2 + \frac{v_{c2}^2}{2g} + \Delta H_c - \Delta H_p + \Delta H_T \tag{4.12}$$

Exemple : jet d'eau vertical

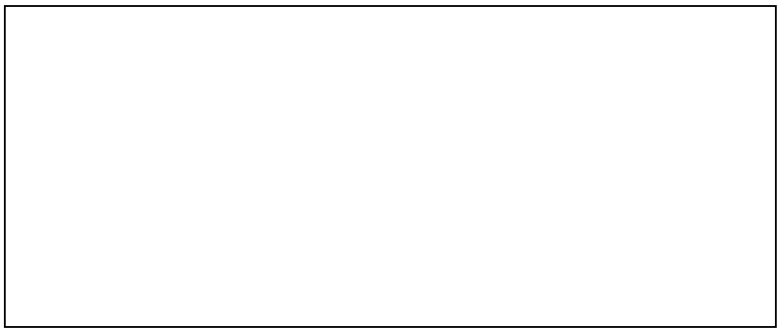


Figure 4.6 – Le bassin, la pompe et le jet d'eau

4.3 Régimes d'écoulement

Pour une même conduite (par exemple un robinet qui coule) on distingue deux situations d'écoulement suivant la vitesse du fluide.

Un écoulement laminaire à faible vitesse pour lequel les lignes de courant ne se mélangent pas. Ce sont les forces de frottement visqueux qui dominent et imposent ce régime d'écoulement.

Un écoulement turbulent à très grande vitesse pour lequel les lignes de courant se coupent et forment des tourbillons. Ces modifications de régime d'écoulement se

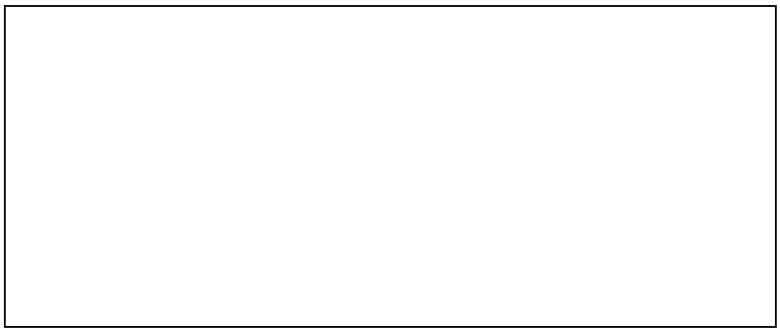


Figure 4.7 – Profil de vitesse dans une canalisation cylindrique : influence du régime

répercutent sur la forme des écoulements, notamment sur le profil des vitesses (figure 4.7).

4.3.1 Expérience de Reynolds

Les paramètres intervenant dans l'apparition de ces phénomènes ont été mis en évidence par l'expérience de Reynolds (1883). À l'aide de tubes de verres de diamètres différents, et en injectant du permanganate de potassium au centre des conduites matérialisant les lignes de courant, Reynolds faisait varier le régime d'écoulement à l'aide de la vitesse moyenne du fluide contrôlée par une vanne.

Figure 4.8 – Du régime laminaire au régime turbulent

À faible vitesse, le filet coloré s'écoule sans se mélanger au fluide. À partir d'une certaine vitesse des remous puis des tourbillons apparaissent : le colorant se mélange au liquide.

4.3.2 Nombre de Reynolds

Reynolds mis ainsi en évidence que le régime d'écoulement dépend de la quantité Re appelée depuis nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} \tag{4.13}$$

où ρ, v, et η sont respectivement la densité volumique, la vitesse moyenne et la viscosité dynamique du fluide s'écoulant dans une conduite de diamètre D. Re est sans dimension.

Ainsi on distingue trois régimes d'écoulement en fonction de la valeur du nombre de Reynolds :

- le régime est laminaire si $Re \leq 2000$,
- le régime est turbulent si $Re \geq 4000$,
- le régime est transitoire ou turbulent si $2000 \leq Re \leq 4000$.

Le nombre de Reynolds représente en fait le rapport des forces d'inertie, qui favorisent la turbulence, sur les forces de frottement visqueux qui tendent à freiner le mouvement du fluide.

4.3.3 Interprétation : régimes turbulents, transitoires

4.3.4 Conséquence : expression des coefficients de pertes de charge linéaire

Le nombre de Reynolds, donc le régime d'écoulement, joue un rôle primordial sur la valeur des pertes de charges régulières rencontrées dans un écoulement en modifiant la valeur du coefficient de pertes de charge linéaire λ.

4.3.4.1 Écoulement laminaire

Dans ce cas λ ne dépend que de la valeur du nombre de Reynolds Re :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \tag{4.14}$$

Figure 4.9 – Un jet oscillant en configuration flûte à bec : oscillations excitées par un champ acoustique et favorisées par la présence d'un biseau. Départ en turbulence dès le 'choc' avec le biseau (crédit photo C. Ségoufin).

4.3.4.2 Loi de Poiseuille

Pour l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans une conduite horizontale, on montre que le débit volumique a pour expression entre deux point de l'écoulement distants de l et aux pression respective p_1 et p_2 :

$$Dv = \frac{\pi R^4}{8\eta l}(p_1 - p_2) \tag{4.15}$$

4.3.4.3 Écoulement turbulent

Dans ce cas le problème de la détermination de λ devient très complexe : l'état de surface de la canalisation devient d'autant plus sensible que la valeur de Re est grande.

Dans de nombreux cas la formule de Colebrook traduit correctement ces phénomènes :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log(\frac{k}{3,7D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}) \tag{4.16}$$

mais est très difficile d'emploi (formule implicite).

Pour des écoulements turbulents à faible Re ($4000 \leq Re \leq 10^5$) et des tuyaux lisses on peut utiliser la formule de Blasius :

$$\lambda = 0,316Re^{-0,25} \tag{4.17}$$

Bibliographie...sommaire

Ouvrages

Mécanique expérimentale des fluides - COMOLET (Masson)

Mécanique des fluides HANAUER (Breal)

Mesure des débits et vitesses des fluides LEFEBVRE (Masson)

Mécanique des fluides (cours et exercices résolus) MEIER (Masson)

Si je n'en conseillais qu'un le voici : Mécanique des fluides appliquée JOULIÉ (Ellipses)

Mécanique des fluides deuxième année BRÉBEC (Hprépa, Hachette)

La Mécanique des fluides SALIN (Nathan Universités)

Liens utiles

Un cours de plus haut niveau que celui-ci et qui l'a beaucoup inspiré ; téléchargeable gratuitement à cette adresse :
http ://sravier.free.fr/pro/cours/MF.html

Une source inépuisable d'illustrations (je remercie au passage leurs auteurs) :
http ://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/physique/PHYS/Term/Mecaflu/mecanique_des_fluides.htm

Pour voir des poux la-haut :
http ://inter.action.free.fr/

See how it flies : aérodynamique et aviation
http ://www.av8n.com/

Site de funboard pour visualiser l'effet venturi :
http ://perso.wanadoo.fr/corse/_private/funboard_bonifacio_.htm

Programmes des unités d'enseignements (page web du DUT GMP Paris 10) :
http ://www.cva.u-paris10.fr/iut/gmp/gmp2_ue34.html